Leçon 156 : Endomorphismes trigonalisables. Endomorphismes nilpotents.

Références : Mansuy, Rombaldi, Beck ; Caldero (CVAL), Gourdon (pour Dunford)

I - Endomorphismes trigonalisables

1) Polynômes d'endomorphismes

2) Trigonalisation et critères

3) Co-trigonalisation

II - Endomorphismes nilpotents

1) Noyaux itérés et définitions

2) Cône nilpotent

3) Caractérisations

III - Applications

1) Décomposition de Dunford

2) Endomorphismes cycliques

3) Réduction de Jordan

DEV 1 : Nombre d'endomorphismes nilpotents sur $\mathbb{F}_q$.

DEV 2 : Décomposition de Dunford

Leçon 156 : Endomorphismes trigonalisables. Endomorphismes nilpotents

Soit E un espace vectoriel de dimension finie sur un corps K commutatif.

I - Endomorphismes trigonalisables

1) Polynômes d'endomorphismes [ROM] [MAN]

DEF 1 : Soit $u \in \mathcal{L}(E)$. On note $u^0 = Id$ et on définit par récurrence $\forall k \in \mathbb{N}$, $u^{k+1} = u \circ u^k$.

DEF 2 : Pour tout $P \in K[X]$, $P = \sum_{k=0}^{N} a_k X^k$, on définit l'endomorphisme $P(u) = \sum_{k=0}^{N} a_k u^k$.

REM 3 : Il en est de même pour les matrices $A \in \mathcal{M}_n(K)$ avec $n = \dim(E)$.

PROP 4 : L'application $\varphi : K[X] \to \mathcal{L}(E)$, $P \mapsto P(u)$ est un morphisme d'algèbres.

PROP 5 : On note $K[u] = \mathrm{Im}(\varphi)$. C'est une sous-algèbre commutative de $\mathcal{L}(E)$.

DEF 6 : Le noyau de ce morphisme est un idéal de $K[X]$. On a donc $\ker(\varphi) = (\Pi_u)$ et Π_u est appelé polynôme minimal de u : $P(u) = 0 \iff \Pi_u \mid P$.

PROP 7 : On a $\dim(K[u]) = \deg(\Pi_u)$. Une base de $K[u]$ est donnée par $(u^k)_{k \in [\![0 ; \deg(\Pi_u) - 1]\!]}$.

PROP 8 : Soit $F \subset E$ un sev stable par $u \in \mathcal{L}(E)$. Alors $\Pi_{u|_F} \mid \Pi_u$.

THM 9 : (Cayley - Hamilton) Soit $u \in \mathcal{L}(E)$ et χ_u son polynôme caractéristique. Alors $\Pi_u \mid \chi_u$.

THM 10 : (Lemme de décomposition des noyaux) : Soient $(P_j)_{j \geq 1}$ une famille de $p \geq 2$ polynômes deux à deux premiers entre eux dans $K[X] \setminus \{0\}$. Soit $P = \prod_{k=1}^{p} P_k$.
On a $\ker(P(u)) = \bigoplus_{i=1}^{p} \ker(P_i(u))$

REM 11 : Ce théorème est utile pour décomposer l'espace en somme de sous-espaces stables.

PROP 12 : $Sp_K(u) = \Pi_u^{-1}(\{0\}) = \chi_u^{-1}(\{0\})$

2) Trigonalisation et critères [MAN]

DEF 13 : Un endomorphisme u de E est dit trigonalisable lorsqu'il existe une base de E dans laquelle sa matrice est triangulaire supérieure.
. Une matrice $A \in \mathcal{M}_n(K)$ est dite trigonalisable lorsqu'elle est semblable à une matrice triangulaire supérieure.

THM 14 : $u \in \mathcal{L}(E)$ est trigonalisable si et seulement s'il admet un polynôme annulateur scindé dans K si et seulement si Π_u est scindé dans K.

COR 15 : Si K est algébriquement clos, tout endomorphisme est trigonalisable dans K.

COR 16 : Si u est trigonalisable et $F \subset E$ est un sev stable par u, alors $u_{|F}$ est trigonalisable.

COR 18 : Soit $u \in \mathcal{L}(E)$ et $\lambda_1, \dots, \lambda_n$ les valeurs propres de u comptées avec multiplicité. Alors :
$$\mathrm{Tr}(u) = \sum_{k=1}^{n} \lambda_k \text{ et } \det(u) = \prod_{k=1}^{n} \lambda_k$$

APPLI 19 : Soit $A \in \mathcal{M}_n(K)$. Alors $\det(\exp(A)) = \exp(\mathrm{Tr}(A))$.

3) Co-trigonalisation [MAN]

DEF 20 : Une famille d'endomorphismes $(u_i)_{i \in I} \in \mathcal{L}(E)^I$ est dite co-trigonalisable lorsqu'il existe une base $\mathcal{B}$ de E dans laquelle $\forall i \in I$, $\mathrm{Mat}_{\mathcal{B}}(u_i)$ est triangulaire supérieure.

PROP 21 : Soit $(u_i)_{i \in I} \in \mathcal{L}(E)^I$ tous trigonalisables commutant entre eux deux à deux. Alors $(u_i)_{i \in I}$ est co-trigonalisable.

II - Endomorphismes nilpotents

1) Noyaux itérés et définitions [CVA] [BEC]

LEMME 22 : . $(\ker(u^k))_{k \in \mathbb{N}}$ est une suite croissante
. $(\mathrm{Im}(u^k))_{k \in \mathbb{N}}$ est une suite décroissante
Ces deux suites sont stationnaires à partir d'un certain rang n_0.

LEMME 23 : $\forall k \in \mathbb{N}$, $\dim(\ker(u^{k+1})) = \dim(\ker(u^k)) + \dim(\mathrm{Im}(u^k) \cap \ker(u))$

LEMME 24 : La suite $(\dim(\ker(u^{k+1})) - \dim(\ker(u^k)))_{k \in \mathbb{N}}$ est décroissante et tend vers 0.

DEF 25 : $u \in \mathcal{L}(E)$ est dit nilpotent lorsqu'il existe $p \in \mathbb{N}^*$ tel que $u^p = 0$. On note $\mathcal{N}(E)$ leur ensemble.

DEF 26: On appelle indice de nilpotence de u (ou de $A \in \mathcal{M}_n(K)$) et on note $nil(u)$ (ou $nil(A)$) le plus petit entier $p \in \mathbb{N}^*$ tel que $u^p = 0$

EX 27: La dérivation $P \mapsto P'$ est nilpotente de $K_n[X]$ dans lui-même mais pas de $K[X]$ dans lui-même.

2) Cône nilpotent [BEC] [CVA]

DEF 28: $\mathcal{N}(E)$ est un cône i.e pour tout $(u, \lambda) \in \mathcal{N}(E) \times K$, $\lambda u \in \mathcal{N}(E)$

REM 29: $\mathcal{N}(E)$ n'est pas un sev de $\mathcal{L}(E)$ car il n'est pas stable par addition, ce n'est pas non plus un idéal.

EX 30: $\begin{pmatrix} 0 & 1 \\ 0 & 0 \end{pmatrix} + \begin{pmatrix} 0 & 0 \\ 1 & 0 \end{pmatrix}$ n'est pas nilpotente.

PROP 31: Soit $M \in \mathcal{M}_2(K)$, alors $\chi_M = X^2 - tr(M)X + det(M)$
Alors M est nilpotente si et seulement si $tr(M) = det(M) = 0$
En écrivant $M = \begin{pmatrix} a & b \\ c & d \end{pmatrix}$, alors M est nilpotente si et seulement si $a = -d$ et $ad - bc = 0$

REM 32: Voir ANNEXE 1 pour le dessin du cône dans le cas $K = \mathbb{R}$.

PROP 33: Soient $u, v \in \mathcal{N}(E)$ tels que $u \circ v = v \circ u$. Alors $u + v$ est nilpotent.
. Soient $u \in \mathcal{N}(E)$, $f \in \mathcal{L}(E)$. Si $u \circ f = f \circ u$, alors $u \circ f$ est nilpotent.

LEMME 34 (Fitting): Avec les notations du lemme 22, on a $E = \ker(u^{n_0}) \oplus Im(u^{n_0})$ et u induit un endomorphisme nilpotent sur $\ker(u^{n_0})$ et un automorphisme sur $Im(u^{n_0})$.

DEF 35: Soit $u \in \mathcal{L}(E)$. On appelle décomposition de Fitting de u la donnée de $((F, G), v, w)$ où $F = \ker(u^{n_0})$, $G = Im(u^{n_0})$, $v = u_{|F}$, $w = u_{|G}$ avec $E = F \oplus G$, $u \in \mathcal{N}(F)$, $w \in GL(G)$. DEV 1

THM 36: Si K est le corps fini de cardinal q, il y a $m_d = q^{d(d-1)}$ matrices nilpotentes de taille $d \times d$ à coefficients dans K.

3) Caractérisations [BEC]

PROP 37: Soit $u \in \mathcal{L}(E)$. Les assertions suivantes sont équivalentes.
(i) u est nilpotent
(ii) $\chi_u = X^n$
(iii) $\exists p \in \mathbb{N}^*, \pi_u = X^p$, ($p = nil(u)$ dans ce cas)
(iv) u est trigonalisable avec des zéros sur la diagonale
(v) u est trigonalisable avec 0 comme seule valeur propre
(vi) 0 est la seule valeur propre de u dans toute extension algébrique de K

EX: $\begin{pmatrix} 1 & -1 \\ 1 & -1 \end{pmatrix}$ est nilpotente d'indice 2.

COR 38: $Vect(\mathcal{N}(E)) = \ker(Tr) = \{u \in \mathcal{L}(E) \mid Tr(u) = 0\}$.

PROP 39: Si $car(K) = 0$, $u \in \mathcal{N}(E) \iff \forall k \in \mathbb{N}^*, Tr(u^k) = 0$

III - Applications

1) Décomposition de Dunford [GOU] DEV 2

PROP 40: Soit $u \in \mathcal{L}(E)$ et $P \in K[X]$ tel que $P(u) = 0$, $P = \beta M_1^{\alpha_1} \cdots M_r^{\alpha_r}$ sa décomposition en facteurs irréductibles de $K[X]$. Pour tout $i \in [\![1; r]\!]$, on note $N_i = \ker(M_i^{\alpha_i})$.
Alors $E = \bigoplus_{i=1}^{r} N_i$ et le projecteur sur N_i parallèlement à $\bigoplus_{j \neq i} N_j$ est un polynôme en u.

THM 41 (Dunford): Soit $u \in \mathcal{L}(E)$ tel que χ_u soit scindé sur K. Il existe un unique couple (d, n) d'endomorphismes tel que :
(i) d est diagonalisable, n est nilpotente
(ii) $u = d + n$ et $d \circ n = n \circ d$
De plus, d et n sont des polynômes en u.

REM 42: Cette décomposition est utile pour calculer des exponentielles de matrices.

2) Endomorphismes cycliques $n = dim(E)$. [MAN] [ROM]

DEF 43: Un endomorphisme u de E est dit cyclique lorsqu'il existe $x \in E$ tel que $(x, u(x), \ldots, u^{n-1}(x))$ est une base de E.

EX 44: Si $dim(E) = 2$, $u \in \mathcal{L}(E)$ est soit une homothétie soit cyclique.

EX 45: Si $u \in \mathcal{L}(E)$ admet n valeurs propres distinctes, alors u est cyclique.

PROP 46: Si $u \in \mathcal{L}(E)$, $\dim(E) = n$, alors $\deg(\pi_u) = n$

PROP 47: Si $u \in \mathcal{L}(E)$ est tel que $\deg(\pi_u) = \dim(E)$, alors u est cyclique.

THM 48: Soit $u \in \mathcal{L}(E)$ diagonalisable. Alors u est cyclique si et seulement si u a n valeurs propres distinctes.

THM 49: $u \in \mathcal{L}(E)$ cyclique est diagonalisable si et seulement s'il a n valeurs propres distinctes.

THM 50: Soit $u \in \mathcal{L}(E)$ nilpotent. Alors u est cyclique si et seulement si $\mathrm{nil}(u) = n$.

DEF 51: La matrice compagnon de $P(X) = X^n + \sum_{k=0}^{n-1} a_k X^k \in K[X]$ est la matrice $C_P = \begin{pmatrix} 0 & \cdots & & -a_0 \\ 1 & \ddots & & \vdots \\ (0) & \ddots & 1 \; 0 & -a_{n-1} \end{pmatrix}$

PROP 52: $u \in \mathcal{L}(E)$ est cyclique si et seulement s'il existe une base de E dans laquelle sa matrice est une matrice compagnon.

PROP 53: Pour $P \in K[X]$ unitaire, on a $\pi_{C_P} = \chi_{C_P} = P$.

COR 54: Soit $P \in K[X]$, P unitaire. On a
- C_P est trigonalisable dans K si et seulement si P est scindé dans K
- C_P est diagonalisable dans K si et seulement si P est scindé à racines simples dans K.

REM 55: Il est intéressant d'étudier le commutant de C_P ou d'un endomorphisme cyclique.

3) Réduction de Jordan [BFC]

DEF 56: Un bloc de Jordan est une matrice de la forme $J_n = \begin{pmatrix} 0 & 1 & (0) \\ & \ddots & 1 \\ (0) & & 0 \end{pmatrix} \in \mathcal{M}_n(K)$

REM 57: J_n est la transposée de C_{X^n}.

PROP 58: J_n est nilpotente et $\mathrm{nil}(J_n) = n$.

PROP 59: Soit $u \in \mathcal{L}(E)$, $n = \dim(E)$. LASSE :

(i) Il existe une base $\mathcal{B}$ de E dans laquelle $\mathrm{Mat}_{\mathcal{B}}(u) = J_n$

(ii) u est nilpotent et cyclique

(iii) u est nilpotent et $\mathrm{nil}(u) = n$

(iv) u est nilpotent de rang $n-1$

THM 60 (Réduction de Jordan des nilpotents) : Soient E un espace vectoriel de dimension finie, $u \in \mathcal{L}(E)$ nilpotent. Alors, il existe une famille d'entiers $n_1 \geq n_2 \geq \dots \geq n_p$ et une base $\mathcal{B}$ de E dans laquelle la matrice de u est diagonale par blocs de Jordan :

$$\mathrm{Mat}_{\mathcal{B}}(u) = \begin{pmatrix} J_{n_1} & & (0) \\ & \ddots & \\ (0) & & J_{n_p} \end{pmatrix}$$ appelée réduite de Jordan de u.

De plus, il y a unicité des entiers n_i au sens suivant : soit $m_1 \geq m_2 \geq \dots \geq m_q$ des entiers et une base $\mathcal{B}'$ de E telle que $\mathrm{Mat}_{\mathcal{B}'}(u) = \begin{pmatrix} J_{m_1} & & (0) \\ & \ddots & \\ (0) & & J_{m_q} \end{pmatrix}$, alors $q = p$ et $\forall i \in [\![1;p]\!]$, $m_i = n_i$

REM 61: On peut donc associer à u la suite d'entiers $(\partial_1(u), \dots, \partial_n(u))$ telle que $\partial_j(u)$ est le nombre de blocs de Jordan J_j de taille j dans la réduite de Jordan de u.

COR 62: Deux endomorphismes nilpotents u et v sont semblables si et seulement si pour tout j, $\partial_j(u) = \partial_j(v)$.

EX 63: $A = \begin{pmatrix} 0 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \end{pmatrix}$ et $B = \begin{pmatrix} 0 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \end{pmatrix}$ sont nilpotentes d'indice 2 mais non semblables.

COR 64: $\mathrm{nil}(u)$ est égal à la plus grande taille des blocs de Jordan de la réduite.

THM 65 (Réduction de Jordan, cas général) Soit $u \in \mathcal{L}(E)$. On suppose χ_u scindé dans K. Il existe $(\lambda_1, \dots, \lambda_\ell) \in K^\ell$ deux à deux distincts et pour tout $i \in [\![1;\ell]\!]$, un entier j_i et une famille d'entiers $n_{i,1} \geq n_{i,2} \geq \dots \geq n_{i,j_i} > 0$ tels qu'il existe une base $\mathcal{B}$ de E telle que :

$$\mathrm{Mat}_{\mathcal{B}}(u) = \begin{pmatrix} J_{\lambda_1, n_{1,1}} & & & & \\ & \ddots & & & \\ & & J_{\lambda_1, n_{1,j_1}} & & \\ & & & J_{\lambda_\ell, n_{\ell,1}} & \\ & & & & \ddots \\ & & & & & J_{\lambda_\ell, n_{\ell,j_\ell}} \end{pmatrix}$$

avec $J_{\lambda,n} = \lambda I_n + J_n$

De plus, les entiers sont uniques à permutation des blocs près.

COR 66: Soient $u, v \in \mathcal{L}(E)$ tels que χ_u, χ_v soient scindés dans K. Alors u et v sont semblables si et seulement s'ils ont la même réduite de Jordan.

__ANNEXE 1 :__ $K = \mathbb{R}$, on peut dessiner le cône $\mathcal{N}(E)$ en le représentant dans l'espace vectoriel de dimension 3 des matrices de trace nulle : $M = \begin{pmatrix} a & b \\ c & -a \end{pmatrix} \in \mathcal{M}_2(\mathbb{R})$

par l'équation $-a^2 - bc = 0$ $\Leftrightarrow a^2 = -bc$

$\Leftrightarrow a = \sqrt{-bc}$ ou $a = -\sqrt{-bc}$

$b < 0$, $c > 0$ ou $b > 0$, $c < 0$